JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 13, 45–55 (1975)

Ketten von Nörlund-Matrizen

WOLFGANG BEEKMANN

Mathematisches Institut, Universität Tübingen, 74 Tübingen 1, West Germany

Communicated by P. L. Butzer

HERRN G. G. LORENTZ ZUM 65. GEBURTSTAG AM 25.2.1975 GEWIDMET

1. EINLEITUNG

Die permanenten Nörlund-Matrizen (N, p_n) mit nicht-negativen p_n bilden nach einem Ergebnis von Goffman und Huneke [3] mit dem symmetrischen Produkt als Multiplikation und der strikten Inklusion (der Wirkfelder) als Ordnungsrelation eine geordnete abelsche Gruppe. U.a. zeigten die Autoren, daß in dieser Halbgruppe die Kette der Cesàro-Matrizen C_α $(0 \leqslant \alpha < \infty)$ nicht maximal ist: sie läßt sich sowohl verfeinern als auch verlängern. Allgemeiner zeigten sie, daß es zu jeder gegebenen Kette ein Element in der Halbgruppe gibt, das entweder oberhalb aller Kettenelemente liegt oder mit keinem der Ketteneiemente vergleichbar ist. Die Frage, ob stets ein oberhalb liegendes Element existiert, blieb offen.

Da es sich bei diesen Untersuchungen um nicht-negative permanente, also total-permanente Matrizen handelt, liegt es nahe, statt der gewöhnlichen Inklusion die Totalinklusion als Ordnungsrelation heranzuziehen; sie ermöglicht überdies eine schärfere Differenzierung der Matrizen, da sie den Kernvergleich der Transformationen bedeutet: siehe Lorentz und Robinson [7, Theorem 3]. Bezüglich dieser Relation erweist sich nun die Cesàro-Kette als maximal.

Um das Verhältnis beider Ordnungsrelationen zueinander weiter zu verdeutlichen, konstruieren wir Ketten, die bezüglich beider Relationen maximal sind, aber auch Ketten, die maximal bezüglich der Totalinklusion sind, deren Glieder bezüglich der gewöhnlichen Inklusion jedoch nicht unterscheidbar sind. Zugleich werden einige in [3] aufgeworfene Fragen, darunter die oben formulierte, beantwortet.

2. BEZEICHNUNGEN UND HILFSMITTEL

Zu gegebener Folge $p = \{p_0, p_1, \ldots\}$ mit $P_n = p_0 + \cdots + p_n \neq 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$ ist die Nörlund-Matrix $N_p = (N, p_n)$ eine untere Dreiecksmatrix

640/13/1-4

mit den Elementen

$$a_{nk} = p_{n-k}/P_n \quad \text{für} \quad 0 \leqq k \leqq n, \qquad a_{nk} = 0 \quad \text{für} \quad k > n.$$

Mit $\mathcal{N}^+$ bezeichnen wir die total-permanenten Nörlund–Matrizen, das sind die permanenten nicht-negativen unter ihnen (siehe [6]), also

$$\mathcal{N}^+ = \{(N, p_n): p_0 > 0, p_n \geqq 0\ (n \geqq 1), p_n = o(P_n) \text{ für } n \to \infty\}.$$

Auf Grund der letzten Bedingung konvergiert die zu $N_p \in \mathcal{N}^+$ assoziierte Potenzreihe

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \qquad \text{für} \quad |z| < 1.$$

Zu $\mathcal{N}^+$ gehören insbesondere die Cesàro–Matrizen $C_\alpha = (N, p_n^\alpha)$ mit $p_n^\alpha = \binom{n+\alpha-1}{n}$ bzw. $p^\alpha(z) = (1 - z)^{-\alpha}$.

Neben dem gewöhnlichen Matrixprodukt betrachtet man für N_p, $N_q \in \mathcal{N}^+$ das symmetrische Produkt $N_p * N_q = N_r$, das durch

$$r_n = (p * q)_n = \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} q_k$$

definiert ist. Die Folge $r = \{r_n\}$ ist also die Faltung der Folgen p und q, und für die assoziierten Reihen gilt $r(z) = p(z)\, q(z)$. Speziell ist $C_{\alpha+\beta} = C_\alpha * C_\beta$ und $N_p * I = N_p$, wo $I = C_0$ die Einheitsmatrix ist.

Man zeigt leicht (vgl. [4, S. 65]), daß mit N_p, N_q auch $N_p * N_q$ in $\mathcal{N}^+$ liegt. Da die Faltung assoziativ und kommutativ ist, bildet $(\mathcal{N}^+, *)$ eine abelsche Halbgruppe mit Einselement.

Wir schreiben $N_q \supseteqq N_p$ bzw. $N_q \supset N_p$ bzw. N_q t.s. N_p bzw. N_q s.t.s. N_p, wenn N_q stärker bzw. strikt stärker bzw. total-stärker bzw. strikt total-stärker als N_p ist. Äquivalenz von N_q mit N_p (d.h. $N_q \supseteqq N_p$ und $N_p \supseteqq N_q$) wird durch $N_q \approx N_p$ ausgedrückt. Z.B. gilt für die "Zweier-Matrix" Z_α, d.i. die durch die Folge $\{\alpha, 1 - \alpha, 0, 0, \ldots\}$ erzeugte Nörlund-Matrix (siehe [11, Seite 126]),

$$Z_\alpha \approx I \qquad \text{für} \quad \tfrac{1}{2} < \alpha < 1,$$

jedoch ist $Z_\alpha \neq I$ für $\alpha \neq 1$. Dagegen sind total-äquivalente Nörlund-Matrizen aus $\mathcal{N}^+$ notwendig identisch [2, Theorem 3]. Im einzelnen gilt für die Einschließung von Nörlund-Matrizen (siehe [4, Theoreme 19 und 21], [2, Theoreme 1 und 3]).

LEMMA 1. *Seien* N_p, N_q *in* $\mathcal{N}^+$; *für die assoziierten Potenzreihen sei* $q(z)/p(z) = k(z) = \sum k_n z^n$ *und* $p(z)/q(z) = l(z) = \sum l_n z^n$ *gesetzt. Dann gilt*

(i) $N_q \supseteqq N_p \Leftrightarrow \sum_{\nu=0}^{n} | k_{n-\nu}P_\nu | = O(Q_n)$ *und* $k_n = o(Q_n)$ *für* $n \to \infty$,

(ii) $N_q \approx N_p \Leftrightarrow \sum | k_n | < \infty$ *und* $\sum | l_n | < \infty$,

(iii) N_q t.s. $N_p \Leftrightarrow N_q \supseteqq N_p$ *und* $k_n \geqq 0$ $(n \geqq 0)$,

(iv) N_q s.t.s. $N_p \Leftrightarrow N_q$ s.t. N_p *und* $N_q \neq N_p$.

Durch "t.s." ist also eine Ordnungsrelation auf $\mathcal{N}^+$ gegeben. Die Aussage (iii) läßt sich noch etwas verschärfen.

LEMMA 2. *Unter den Voraussetzungen von Lemma* 1 *gilt sogar*

$$N_q \text{ t.s. } N_p \Leftrightarrow k_n \geqq 0 \quad (n \geqq 1).$$

Beweis. Seien alle $k_n \geqq 0$ ($k_0 = q_0/p_0$ ist stets positiv). Dann hat die Vermittlungsmatrix $C = N_q N_p^{-1} = (c_{n\nu})$ nicht-negative Elemente; denn es ist $c_{n\nu} = k_{n-\nu}P_\nu/Q_n$ für $0 \leqq \nu \leqq n$, $c_{n\nu} = 0$ für $\nu > n$. Wir zeigen, daß C permanent ist: Da die Matrizen N_q und N_p die Zeilensummen 1 besitzen, gilt dies auch für N_p^{-1} und für C. Wegen $c_{n\nu} \geqq 0$ erfüllt C daher auch die Zeilennormbedingung. Aus $N_q = CN_p$ folgt ferner

$$q_{n-\nu}/Q_n = \sum_{\mu=\nu}^{n} c_{n\mu}p_{\mu-\nu}/P_\mu \geqq c_{n\nu}p_0/P_\nu .$$

Es ist also $c_{n\nu} = O(q_{n-\nu}/Q_n) = o(1)$ für $n \to \infty$ und festes ν, da N_q als permanent vorausgesetzt ist. Nach dem Satz von Toeplitz ist folglich C permanent, und wegen $c_{n\nu} \geqq 0$ total-permanent, so daß N_q t.s. N_p folgt.

Im folgenden Korollar treten die rückwärts genommenen Differenzen einer Folge $\{q_n\}$ auf; sie sind für natürliches a rekursiv definiert durch

$$\nabla^0 q_n = q_n, \qquad \nabla^a q_n = \nabla^{a-1} q_n - \nabla^{a-1} q_{n-1} \quad (a \geqq 1),$$

dabei ist gegebenfalls $q_{-\nu} = 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ zu setzen. Man erhält leicht die Darstellungen

$$\nabla^a q_n = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{a}{\nu} q_{n-\nu} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu-a-1}{n-\nu} q_\nu \tag{1}$$

mit $\binom{\lambda}{0} = 1$ und $\binom{\lambda}{m} = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+1)(m!)^{-1}$ für $m = 1, 2, \ldots$. Diese Darstellung (1) wird im Fall nicht-natürlicher Ordnungen $a = \alpha$ als Definition verwendet.

KOROLLAR 2.1 (vgl. [5, Seite 97], [9, Corollary 1]). *Für* $\alpha \geqq 0$ *und* $(N, q_n) \in \mathcal{N}^+$ *gilt*

$$(N, q_n) \text{ t.s. } C_\alpha \Leftrightarrow \nabla^\alpha q_n \geqq 0 \qquad \textit{für} \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Beweis. Es ist

$$q(z)/p^\alpha(z) = q(z)(1-z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \nabla^\alpha q_n z^n.$$

Als einfache Anwendung des Korollars erhält man mit $\nabla^\alpha p_n{}^\beta = \binom{n+\beta-\alpha-1}{n}$ sofort: C_β t.s. $C_\alpha \Leftrightarrow \beta \geqq \alpha$.

Da die Differenzen gebrochener Ordnung vielfach nicht einfach in die Hand zu bekommen sind, sei noch ein weiteres Kriterium angefügt. Es stellt eine leichte Verschärfung von [9, Theorem 1] dar (im Fall $1 < \alpha < 2$) und ergibt im Fall $0 < \alpha \leqq 1$ gerade [9, Corollary 3]:

KOROLLAR 2.2. *Es sei* $\alpha = a + \delta$ $(0 \leqq a$ *ganz,* $0 < \delta \leqq 1)$ *und* $(N, q_n) \in \mathcal{N}^+$. Ferner gelte

$$(n+1)\,\nabla^a q_{n+1} \geqq (n+\delta)\,\nabla^a q_n \qquad \textit{für} \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{2}$$

Behauptung. $\alpha \leqq q_1/q_0$, $\nabla^a q_n \geqq 0$ $(n = 1, 2, \ldots) \Leftrightarrow (N, q_n)$ t.s. C_α.

Beweis. "$\Rightarrow$". Wir setzen

$$\gamma_\nu = (-1)^\nu \binom{-\delta}{\nu}^{-1} \nabla^a q_\nu$$

und bemerken, daß wir auf Grund der Voraussetzungen

$$0 < \gamma_0 = q_0 < (q_1 - a q_0)/\delta = \gamma_1 \qquad \text{und} \qquad \gamma_\nu \leqq \gamma_{\nu+1} \quad (\nu \geqq 1)$$

haben. Zu zeigen ist $\nabla^\alpha q_n \geqq 0$. (Zur Beweismethode vgl. [1]). Aus $q(z)/p^\alpha(z) = q(z)(1-z)^\alpha = q(z)(1-z)^a(1-z)^\delta$ ersieht man

$$\nabla^\alpha q_n = \sum_{\nu=0}^{n} \nabla^a q_\nu \cdot (-1)^{n-\nu} \binom{\delta}{n-\nu}.$$

Für $n = 1, 2, \ldots$ ergibt sich hieraus

$$q_n = \sum_{\nu=0}^{n} \gamma_\nu h_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} (\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1})\, H_\nu + \gamma_0 H_0\,,$$

wobei

$$h_\nu = (-1)^n \binom{-\delta}{\nu} \binom{\delta}{n-\nu} \qquad \text{und} \qquad H_\nu = h_\nu + h_{\nu+1} + \cdots + h_n$$

gesetzt. Aus $h_\nu \leqq 0$ für $0 \leqq \nu < n$ folgt nun $H_\nu \geqq H_0 = 0$ $(0 \leqq \nu \leqq n)$ und damit $\nabla^\alpha q_n \geqq 0$.

"$\Leftarrow$". Aus (N, q_n) t.s. C_α folgt (N, q_n) t.s. C_a wegen $\alpha > a$. Korollar 2.1 ergibt $\nabla^a q_n \geqq 0$ für $n = 1, 2, \ldots$; außerdem ist notwendig $0 \leqq \nabla^\alpha q_1$, d.h. $0 \leqq q_1 - \alpha q_0$. (In diesem Beweisteil wird also die Zusatzvoraussetzung (2) nicht verwendet.)

Neben Lemma 2 mit den Korollaren 2.1 und 2.2 verwenden wir das folgende Einschließungskriterium.

LEMMA 3. *(N, p_n) und (N, q_n) seien in $\mathcal{N}^+$; (N, p_n) erfülle*

$$p_n > 0 \qquad \textit{und} \qquad p_{n+1}/p_n \geqq p_n/p_{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Behauptung. (i) [4, Theorem 23]. $q_n/q_{n-1} \geqq p_n/p_{n-1} \, (n \geqq n_0) \Rightarrow N_q \supseteqq N_p$,

(ii) ([9, 10]) $q_n/q_{n-1} \geqq p_n/p_{n-1} \quad (n \geqq 1) \Rightarrow N_q$ t.s. N_p ;

Auch ohne Erfülltsein von (3) gilt

(iii) $q_n > 0, \sum q_n = \infty, p_n = o(q_n) \Rightarrow N_p \not\supseteqq N_q$.

Beweis (iii). Wegen $Q_n = q_0 + \cdots + q_n \to \infty$ ist die Matrix $(\bar{N}, q_n)$ mit den Elementen $a_{nk} = q_k/Q_n$ $(0 \leqq k \leqq n)$, $a_{nk} = 0$ $(k > n)$ permanent, so daß die Folge

$$P_n/Q_n = Q_n^{-1} \sum_{k=0}^{n} q_k(p_k/q_k)$$

gegen 0 konvergiert. Aus $N_p \supseteqq N_q$ würde wegen Lemma 1(i) aber

$$| l_0 Q_n | \leqslant \sum_{\nu=0}^{n} | l_{n-\nu} Q_\nu | = O(P_n), \qquad \text{also} \quad Q_n = O(P_n)$$

folgen.

Die Bedingung (3) wird insbesondere von den Folgen $\{p_n^\alpha\}$ $(0 < \alpha \leqq 1)$, erfüllt.

3. $\mathcal{N}^+$ ALS GEORDNETE HALBGRUPPE

Analog zum Ergebnis von Goffman–Hunneke [3, Theorem 1] ergibt sich mit "s.t.s." als Ordnungsrelation anstelle von $\supset$

SATZ 1. *Mit $*$ als Multiplikation und* s.t.s. *als Ordnung ist $\mathcal{N}^+$ eine geordnete abelsche Halbgruppe, d.h. es gilt insbesondere für alle N_p, N_q, $N_r \in \mathcal{N}^+$:*

(i) N_r s.t.s. N_q, N_q s.t.s. $N_p \Rightarrow N_r$ s.t.s. N_p,

(ii) N_q s.t.s. $N_p \Rightarrow N_q * N_r$ s.t.s. $N_p * N_r$.

Beweis. (i) folgt unmittelbar aus der Definition. Zum Beweis von (ii) benützen wir Lemma 2. Danach sind in

$$q(z)/p(z) = k(z) = \sum k_n z^n$$

alle $k_n \geqslant 0$ und $k(z) \not\equiv k_0$ (sonst wäre $N_q = N_p$). Andererseits ist

$$(q * r)(z)/(p * r)(z) = q(z)r(z)/p(z)r(z) = k(z) = \sum k_n z^n.$$

Lemma 2 ergibt N_{q*r} t.s. N_{p*r}, und wegen $k(z) \not\equiv k_0$ sind diese beiden Matrizen nicht identisch, so daß mit Lemma 1(iv) die Behauptung folgt.

4. Die Kette der Cesàro-Matrizen

Da die Totalinklusion einen feineren Vergleich auf $\mathcal{N}^+$ erlaubt als die einfache Inklusion, lassen sich andere Ergebnisse von [3] nicht übertragen. So wurde in [3] gezeigt, daß es zu jedem festen $\alpha \geqq 0$ ein Kontinuum von Matrizen $N_p \in \mathcal{N}^+$ gibt mit

$$C_{\alpha+\epsilon} \supset N_p \supset C_\alpha \qquad \text{für alle} \quad \epsilon > 0;$$

die Beispiele sind

$$N_p = (N, q_n{}^\delta) * C_\alpha \qquad \text{mit} \quad q_n{}^\delta = \frac{2}{n+2}\left(\frac{\log 2}{\log(n+2)}\right)^\delta, \qquad 0 \leqslant \delta \leqslant 1.$$

Ferner gibt es (siehe [4, Seite 109] [5]) Nörlund-Matrizen, die stärker sind als alle C_α ($\alpha \geqq 0$), z.B. $(N, \exp n^{1/2})$ und $(N, \cosh n^{1/2})$. Bezüglich der Totalinklusion ist die C_α-Kette jedoch maximal. Dazu zeigen wir zunächst (vgl. hierzu auch die Bemerkung [5, Seite 97])

Satz 2. *Sei $(N, p_n) \in \mathcal{N}^+$. Dann gibt es ein α_0 mit $0 \leqq \alpha_0 \leqq p_1/p_0$ derart, daß die Beziehung*

$$(N, p_n) \text{ t.s. } C_\alpha \qquad \textit{für} \quad 0 \leqq \alpha \leqq \alpha_0, \tag{4}$$

aber nicht für $\alpha > \alpha_0$ erfüllt ist.

Beweis. Nach Korollar 2.1 gilt (4) genau dann, wenn $\nabla^\alpha p_n \geqq 0$ für alle $n = 1, 2, \ldots$ erfüllt ist. Bei festem n ist $\nabla^\alpha p_n$ ein Polynom höchstens n-ten Grades in α. Mit I_n bezeichnen wir das größte abgeschlossene Intervall der Form $[0, \beta_n]$ mit $0 \leqq \beta_n \leqq +\infty$, in welchem das Polynom $\nabla^\alpha p_n$ nicht-negativ ist. (Wegen $\nabla^0 p_n = p_n \geqq 0$ liegt 0 in jedem I_n.) Für $n = 1$ erhält man aus $\nabla^\alpha p_1 = p_1 - \alpha p_0$ gerade $I_1 = [0, p_1/p_0]$. Der Durchschnitt aller I_n ($n \geqq 1$) ist abgeschlossen und hat die Form $[0, \alpha_0]$. Nach Konstruktion hat dieses α_0 die behaupteten Eigenschaften.

KOROLLAR 4.1. *Es gibt keine Nörlund-Matrix, die total-stärker als alle* C_α $(\alpha \geqq 0)$ *ist.*

KOROLLAR 4.2. ([9, Theorem 3], [2, Theorem 4]).

$$(N, \cosh n^{1/2}) \text{ t.s. } C_\alpha \Leftrightarrow 0 \leqq \alpha \leqq \cosh 1 = 1.54\ldots .$$

Man zeigt nämlich—etwa durch Betrauchtung der 2. Ableitung der Funktion cosh —, daß $\nabla^2 \cosh(n)^{1/2} \geqq 0$ für $n = 2, 3, \ldots$ gilt; d.h. die I_n des Beweises von Satz 2 enthalten für $n \geqq 2$ das Intervall $[0, 2]$; folglich ist $I_1 = [0, \cosh 1]$ gleich dem Durchschnitt aller I_n $(n \geqq 1)$.

KOROLLAR 4.3.

$$(N, e^{\sqrt{n}} \text{ t.s. } C_\alpha \Leftrightarrow 0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0 = e + \tfrac{1}{2} - [(e + \tfrac{1}{2})^2 - 2e^{\sqrt{2}}]^{1/2} = 1.75\ldots .$$

Wie im vorigen Beispiel zeigt man $I_n \supseteqq [0, 2]$ für $n = 3, 4, \ldots$; da $I_1 = [0, e] \supset [0, 2]$ gilt, ist α_0 die kleinere der Nullstellen von

$$\nabla^\alpha p_2 = p_2 - \alpha p_1 + \binom{\alpha}{2} p_0 = e^{\sqrt{2}} - \alpha e + \alpha(\alpha - 1)/2.$$

Übrigens läßt sich mittels Lemma 2 leicht zeigen, daß $(N, e^{(n)^{1/2}})$ und $(N, \cosh n^{1/2})$ total-unvergleichbar sind. Es ist dem Autor nicht bekannt, ob die beiden Matrizen im gewöhnlichen Sinne vergleichbar sind.

SATZ 3. *Die C_α-Kette läßt sich (im Sinne des Totalvergleichs) nicht verfeinern, genauer: Für festes α gilt*

(i) $C_{\alpha+\epsilon}$ t.s. N_p t.s. C_α *für alle* $\epsilon > 0$ $(\alpha \geqq 0) \Rightarrow N_p = C_\alpha$,

(ii) C_α t.s. N_p t.s. $C_{\alpha-\epsilon}$ *für alle* $0 < \epsilon \leqq \alpha \Rightarrow N_p = C_\alpha$.

Beweis. (i) Aus Lemma 2 folgt, daß die Koeffizienten $k_n(\epsilon)$ in

$$p^{\alpha+\epsilon}(z)/p(z) = (1 - z)^{-\alpha-\epsilon}/p(z) = \sum k_n(\epsilon) z^n$$

sämtlich nicht-negativ sind. Die $k_n(\epsilon)$ sind Polynome in ϵ; folglich konvergiert $k_n(\epsilon)$ für $\epsilon \to 0$ gegen einen nicht-negativen Grenzwert k_n ; diese k_n sind die Koeffizienten in

$$p^\alpha(z)/p(z) = \sum k_n z^n.$$

Lemma 2 liefert C_α t.s. N_p und Lemma 1(iv) nun $C_\alpha = N_p$. Analog, oder explizit mit Korollar 2.1, zeigt man (ii).

Daß die Voraussetzungen in Satz 3 nicht wesentlich abgeschwächt werden können, zeigen die oben erwähnten Beispiele (N, q_n^{δ}): Für $\alpha \geqq 0$, $0 \leqq \delta < \delta' \leqq 1$ gilt nicht nur

$$C_{\alpha+\epsilon} \supset (N, q_n^{\delta}) * C_\alpha \supset (N, q_n^{\delta'}) * C_\alpha \supset C_\alpha \qquad \text{für alle} \quad \epsilon > 0,$$

sondern, wie man dem Beweis in [3] entnimmt, auch

$$(N, q_n^{\delta}) * C_\alpha \quad \text{t.s.} \quad (N, q_n^{\delta'}) * C_\alpha \quad \text{t.s.} \quad C_\alpha .$$

Im Hinblick auf (ii) von Satz 3 bringen wir ergänzend Beispiele von Nörlund-Matrizen, die strikt zwischen C_β und $C_{\beta-\epsilon}$ liegen, und beantworten damit eine in [3] gestellte Frage.

SATZ 4. *Für α, $\delta \geqq 0$ sei $r_n^{\alpha,\delta} = \binom{n+\alpha-1}{n}(\log 2/\log(n+2))^{\delta}$ gesetzt. Dann gilt für $0 < \delta < \delta'$ und $0 < \alpha \leqq 1$:*

(i) $(N, r_n^{\alpha,\delta}) \in \mathcal{N}^+$,

(ii) $C_\alpha \supset (N, r_n^{\alpha,\delta}) \supset (N, r_n^{\alpha,\delta'}) \supset C_{\alpha-\epsilon}$ *für alle ϵ mit $0 < \epsilon \leqq \alpha$,*

(iii) C_α t.s. $(N, r_n^{\alpha,\delta})$ t.s. $(N, r_n^{\alpha,\delta'})$,

(iv) *Ist $\beta > 1$, so folgt aus* (ii) *und* (iii):

$$C_\beta \supset (N, r_n^{\alpha,\delta}) * C_{\beta-\alpha} \supset (N, r_n^{\alpha,\delta'}) * C_{\beta-\alpha} \supset C_{\beta-\epsilon} \qquad \text{für alle } 0 < \epsilon < \beta,$$

und

$$C_\beta \quad \text{t.s.} \quad (N, r_n^{\alpha,\delta}) * C_{\beta-\alpha} \quad \text{t.s.} \quad (N, r_n^{\alpha,\delta'}) * C_{\beta-\alpha} \quad \text{t.s.} \quad C_{\beta-\alpha} .$$

Beweis. Wir verwenden Lemma 3. Für $r_n = r_n^{\alpha,\delta}$ gilt $r_{n+1}/r_n \geqq r_n/r_{n-1}$ $(n = 1, 2,\ldots)$, da $x + \alpha - 1/x$ und $\log x/\log(x+1)$ mit x wachsen. Ferner ersieht man aus $r_n = O(n^{\alpha-1}(\log n)^{-\delta})$, daß r_n beschränkt und $R_n = r_0 + \cdots + r_n$ unbeschränkt ist; insbesondere ergibt sich $r_n = o(R_n)$ und damit (i).

Für $0 < \delta < \delta'$ folgt nun aus den Ungleichungen

$$\begin{aligned} p_n^{\alpha}/p_{n-1}^{\alpha} = (n+\alpha-1)/n &\geqslant \frac{n+\alpha-1}{n}\left(\frac{\log(n+1)}{\log(n+2)}\right)^{\delta} \\ &= r_n^{\alpha,\delta}/r_{n-1}^{\alpha,\delta} \geqslant r_n^{\alpha,\delta'}/r_{n-1}^{\alpha,\delta'} , \end{aligned}$$

die für $n = 1, 2, 3,\ldots$ gelten,

$$C_\alpha \quad \text{t.s.} \quad (N, r_n^{\alpha,\delta}) \quad \text{t.s.} \quad (N, r_n^{\alpha,\delta'}).$$

Ferner hat $r_n^{\alpha,\delta'}/r_n^{\alpha,\delta} = O((\log n)^{\delta'-\delta}) = o(1)$ zur Folge, daß die aufgeführten Matrizen nicht äquivalent sein können, d.h.

$$C_\alpha = (N, r_n^{\alpha,0}) \supset (N, r_n^{\alpha,\delta}) \supset (N, r_n^{\alpha,\delta'}).$$

Schließlich betrachten wir die Ungleichung $r_n/r_{n-1} \geqq p_n^{\alpha-\epsilon}/p_{n-1}^{\alpha-\epsilon}$; sie ist erfüllt genau dann, wenn

$$\epsilon/(n + \alpha - 1) \geqq 1 - (\log(n+1)/\log(n+2))^\delta$$

gilt. Dies ist für alle genügend großen n der Fall, da die rechte Seite abgeschätzt werden kann durch $\delta/(n+1)\log(n+1) = o((n+1)^{-1})$. Es folgt $(N, r_n^{\alpha,\delta}) \supseteqq C_{\alpha-\epsilon}$ für $0 < \epsilon < \alpha$, und wegen $r_n^{\alpha,\delta}/p_n^{\alpha-\epsilon} = O((\log n)^{-\delta}) = o(1)$ können diese Matrizen nicht äquivalent sein. Damit sind (ii) and (iii) bewiesen, (iv) folgt nun sofort aus Satz 1 bzw. seinem Analogon [3, Theorem 1].

5. Beispiele maximaler Ketten

Die Unterschiede, die beim gewöhnlichen und totalen Vergleich auftreten, sollen noch an einigen Beispielen erläutert werden. Dabei wird zugleich eine (negative) Antwort auf die Fragen (i) und (iv) in [3] gegeben. Wir beschränken uns darauf, Ketten aus sehr einfachen "Primteilern" aufzubauen.

Lemma 4. *Sei $N_p \in \mathcal{N}^+$ und $N_q = Z_\alpha * N_p$ mit $0 < \delta < 1$. Dann gilt:*

(ii) N_q s.t.s. N_p,

(ii) N_q t.s. N_r t.s. $N_p \Rightarrow N_r = N_q$ *oder* $N_r = N_p$.

Zusatz. Entsprechendes gilt im Fall $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, wenn "s.t.s." und "t.s." durch "$\supset$" bzw. "$\supseteqq$" ersetzt wird (siehe z.B. [8]).

Die Matrix Z_α ist also eine Art Primteiler von N_q.

Beweis. Aus Z_α s.t.s. I ergibt sich mit Satz 1 sofort (i). Es werde N_q t.s. N_r t.s. N_p angenommen. Die Quotienten der entsprechenden assoziierten Potenzreihen, also

$$q(z)/r(z) = \sum \rho_n z^n \qquad \text{und} \qquad r(z)/p(z) = \sum \sigma_n z^n,$$

haben dann nicht-negative Koeffizienten (Lemma 2) und erfüllen

$$\sum \rho_n z^n \sum \sigma_n z^n = q(z)/p(z) = \alpha + (1-\alpha)z.$$

Es folgt

$$\sum_{\nu=0}^{n} \rho_\nu \sigma_{n-\nu} = 0 \qquad \text{für} \quad n \geq 2$$

und somit: $\rho_n = \sigma_n = 0$ $(n \geq 2)$ und $\rho_1 \sigma_1 = 0$. Im Fall $\rho_1 = 0$ erhält man $N_r = N_\sigma$; im Fall $\rho_1 \neq 0$ ist $\sigma_1 = 0$ und daher $N_r = N_\rho$.

Das Prinzip von Lemma 4 benützend, lassen sich Ketten konstruieren, die sich nicht verfeinern lassen:

$$I, Z_{\alpha_1}, Z_{\alpha_1} * Z_{\alpha_2}, Z_{\alpha_1} * Z_{\alpha_2} * Z_{\alpha_3}, \dots . \tag{5}$$

Darunter gibt es solche, die sich auch nicht verlängern lassen, also maximal sind.

SATZ 5.

(i) *Es sei* $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ $(0 < \alpha_i < \frac{1}{2})$ *eine gegebene Folge, die einen Häufungspunkt* $\alpha \neq \frac{1}{2}$ *besitzt. Dann ist die Kette* (5) *maximal bezüglich* $\supset$ (*und auch bezüglich* s.t.s., *siehe* (ii)).

(ii) *Es sei* $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ $(0 < \alpha_i < 1)$ *eine gegebene Folge mit* $\sum (1 - \alpha_i) = \infty$. *Dann ist die Kette* (5) *maximal bezüglich* s.t.s..

Bemerkung. Sind im Fall (ii) alle $\alpha_i > \frac{1}{2}$, so sind die Glieder der Kette (5) sogar alle konvergenzgleich.

Beweis. (i) Sei $(N, p_n) = Z_{\alpha_1^*} * Z_{\alpha_2^*} * \cdots * Z_{\alpha_m}$; dann ist die assoziierte Potenreihe

$$p(z) = \sum_{\mu=1}^{m} (\alpha_\mu + (1 - \alpha_\mu) z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$$

ein Polynom, also $P_n = p_0 + \cdots + p_n = p(1) = 1$ für $n \geq m$. Für $(N, q_n) \in \mathcal{N}^+$ folgt daher aus $(N, q_n) \supseteq (N, p_n)$ mit Lemma 1(i) (und den dort verwendeten Bezeichnungen)

$$\sum_{\nu=0}^{n} |k_\nu| = O(Q_n) \qquad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Da $\sum Q_n z^n$ für $|z| < 1$ konvergiert, gilt dasselbe für $\sum k_n z^n$. Das bedeutet: $q(z)/p(z)$ ist holomorph im offenen Einheitskreis; $q(z)$ hat alle Nullstellen von $p(z)$ (mit ihren Vielfachheiten), nämlich $\alpha_\mu/(\alpha_\mu - 1)$, die im Einheitskreis liegen. Häufen sich diese im Innern des Einheitskreises, was nach Voraussetzung der Fall ist, so verschwindet $q(z)$ identisch. Dies widerspricht jedoch der Voraussetzung $(N, q_n) \in \mathcal{N}^+$.

(ii) Behalten wir die Bezeichnungen von Beweisteil (i) bei, so ergibt sich aus der Annahme (N, q_n) t.s. (N, p_n), daß alle k_ν nicht-negativ sind. Insbesondere ist

$$0 \leqq k_1 = (q/p)'(0) = q'(0)/p(0) - q(0)\,p'(0)/p^2(0)$$

und folglich (wegen $p(0) = p_0 > 0$)

$$q'(0) \geqq q(0)\,p'(0)/p(0).$$

Die Ausrechnung der logarithmischen Ableitung ergibt

$$p'(0)/p(0) = \sum_{\mu=1}^{m} (1 - \alpha_\mu)/\alpha_\mu > \sum_{\mu=1}^{m} (1 - \alpha_\mu).$$

Man erhält also

$$q_1 \geqslant q_0 \sum_{\mu=1}^{m} (1 - \alpha_\mu).$$

Diese Beziehung kann nicht für alle m erfüllt sein, da $\sum (1 - \alpha_\mu)$ divergiert.

Literatur

1. W. Beekmann, Total-Vergleich normaler Matrizen mit diagonal-positiver Inversen, *Math. Z.* **125** (1972), 361–371.
2. S. Debi, Some results on total inclusion for Nörlund summability, *Bull. Calcutta Math. Soc.* **47** (1955), 135–141.
3. C. Goffman and H. V. Huneke, The ordered set of Nörlund methods, *Math. Z.* **114** (1970), 1–8.
4. G. H. Hardy, "Divergent Series," Clarendon Press, Oxford, 1949.
5. J. D. Hill, Nörlund methods of summability that include the Cesàro methods of all positive orders, *Amer. J. Math.* **67** (1945), 94–98.
6. W. A. Hurwitz, Some properties of methods of evaluation of divergent sequences, *Proc. London Math. Soc.* **26** (1927), 231–248.
7. G. G. Lorentz and A. Robinson, Core-consistency and total inclusion for methods of summability, *Canad. J. Math.* **6** (1954), 27–34.
8. W. Miesner, The convergence fields of Nörlund means, *Proc. London Math. Soc.* **15** (1965), 495–507.
9. B. E. Rhoades, On total inclusion for Nörlund methods of summability, *Math. Z.* **96** (1967), 183–188.
10. B. E. Rhoades, On total inclusion for Nörlund methods of summability II, *Math. Z.* **113** (1970), 171–172.
11. K. Zeller and W. Beekmann, "Theorie der Limitierungsverfahren," 2. Aufl., Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1970.